

بهینه‌سازی به مفهوم عمومی آن به معنی یافتن بهترین راه حل برای یک مسئله است. اما در مسائل مهندسی لازم است به شکلی دقیق‌تر بیان شود. در اینجا عبارت بهینه مشخص‌کننده بهترین طرح ممکن متضمن کارایی و محدودیت‌های تعریف‌شده توسط مهندس طراح است [۳]. در مسائل مهندسی، به طور خاص در علم مهندسی سازه، شاخه بهینه‌سازی بسیار پر کاربرد است. با توجه به تعریف سازه و مفهوم بهینه‌سازی می‌توان بهینه‌سازی سازه را این‌طور تعریف کرد: یافتن چیدمانی جهت تحمل و انتقال بار به بهترین شکل ممکن [۲]، [۴]. با توجه به محدودیت‌های هندسی مسائل بهینه‌سازی سازه می‌توان این مسائل را به سه دسته بهینه‌سازی شکل، اندازه و توپولوژی دسته‌بندی کنیم. هرچند نمی‌توان با مرز کاملاً روشنی این سه شاخه را از هم متمایز نماییم اما می‌توان ادعا کرد بهترین حالت بهینه‌سازی زمانی رخ می‌دهد که هر سه آن‌ها به طور هم‌زمان ارضا شود که به این نوع بهینه‌سازی، اصطلاح بهینه‌سازی چیدمان^۱ [۵، ۶] اطلاق می‌شود و در این مقاله به آن همان لقب توپولوژی داده شده است.

به این دلیل این نوع بهینه‌سازی را ایده‌آل‌ترین حالت بهینه‌سازی می‌گویند که در تمام نقاط سازه چگالی انرژی کرنشی یکسانی وجود دارد و مصالح بی‌مصرفی وجود ندارد و این به معنی بهترین استفاده از مصالح است [۲]. در مرجع [۲] با روابط ریاضی این واقعیت اثبات شده است. در این مقاله سعی شده با روش‌های عددی این موضوع را بررسی کنیم. مسیرهای چگالی انرژی کرنشی در سازه‌های مختلف بهینه‌سازی شده به شکل کانتوری ترسیم گردیده و با تئوری مطابقت داده شود.

ایجاد شرایط کاملاً ایده‌آل موجب انباشتگی بیشتر مصالح در تعداد معدودی نقاط حساس می‌شود. نقاط حساس نقاطی هستند که تمرکز تنش در آنها زیاد است. این امر سازه‌ای تولید می‌کند که نه تنها کاربردی نیست بلکه بررسی انرژی کرنشی موجود در آن، به طور شهودی بسیار مشکل است. در این مقاله برای فائق آمدن به این مشکل شرایط را از حالت غیر ایده‌آل به سمت ایده‌آل تغییر داده و در هر مرحله روند تغییرات چگالی انرژی کرنشی بررسی شده و بهبود آن نتیجه گرفته شده است.

۲. فرمول‌بندی مسئله

تابع هدف، با توجه به نظر طراح، پارامترهای مختلفی از سازه می‌تواند باشد اما عموماً ترجیح بر این است که سخت‌ترین سازه ایجاد شود. به عبارت روشن‌تر می‌توان گفت هدف توزیع حجم محدودی از مصالح در محدوده‌ای مشخص است به نحوی که سخت‌ترین سازه ایجاد شود. سختی سازه را می‌توان با تعابیر مختلفی تفسیر و تعریف کرد. عموماً ماتریس K ، ارتباط دهنده نیروهای نقاط گرهی و جابجایی نقاط گرهی در عبارت $F = KU$ را به عنوان سختی می‌شناسیم و می‌خواهیم این پارامتر در سازه را حداکثر کنیم. چون بیشتر با مسائل مینیمم سازی سروکار داریم پارامتر نرمی C^2 را تعریف می‌کنیم و هدف را بر مبنای حداقل سازی نرمی می‌گذاریم.

¹ Lay-out

² -compliance

نرمی با عبارت زیر تعریف می شود.

$$c = F^T U$$

که در آن F بردار نیروی درجات آزادی و U بردار جابجائی درجات آزادی هستند.

برای فرمول بندی بالا می توان مزایای زیر را ذکر کرد [۱]:

۱. این نوع فرمول بندی مسئله محدب ایجاد می کند که در آن مینیمم محلی مینیمم کلی نیز است.
۲. نتیجه این بهینه سازی ایجاد سازه ای با چگالی انرژی کرنشی یکنواخت است.

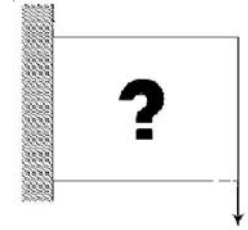
۳. بهینه سازی توپولوژی

همان طور که در مرجع [۷] اشاره شده با دو روش کلی می توان با مسائل بهینه سازی توپولوژی برخورد کرد. روش اول هموژنایزیشن^۳ است که اولین بار توسط بند سو و کیکوچی [۸] پیشنهاد شد. روش چگالی^۴ روش دیگریست که توسط بندسو تشریح شد [۹]. در روش اول فرض بر اینست که سازه از میکرو سازه های سوراخ دار ساخته شده است. اگر اندازه یک سوراخ از یک حد مشخص بزرگ تر شود المان مربوطه از ساختار سازه حذف می شود [۱۰]. در این روش هر المان دارای سه متغیر طراحیست، بنابراین متغیرهای طراحی در این روش نسبت به روش چگالی بیشتر است. در روش چگالی، چگالی هر المان به عنوان تنها متغیر آن المان در نظر گرفته می شود و صفر شدن چگالی یک المان به معنی حذف آن المان است. چون روش دوم نیاز به عملیات ریاضی ساده تری دارد بیشتر مورد توجه است. نرم افزارهای تجارتي مانند GENESIS [۱۱] نیز بر مبنای روش چگالی پایه ریزی شده اند.

در این مقاله نیز از روش چگالی استفاده شده است. محدوده مجاز طراحی به المان های کوچک تقسیم شده و چون در فضای دو بعدی عمل می کنیم ضخامت هر المان را به عنوان متغیر طراحی انتخاب کرده ایم. مثلاً برای مکانیزم کسولی شکل نشان داده شده در شکل (۱) مسئله بهینه سازی توپولوژی را به فرم ریاضی زیر می توان نوشت:

³ -Homogenization Method

⁴ -Density Method



Find X

To minimize Compliance

$$\text{Subject to } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i a_i \leq V \\ 0 < x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \end{cases}$$

شکل (۱): مکانیزم کنسولی شکل

که در این روابط X بردار متغیرهای طراحی (ضخامت المان‌ها)، Compliance نرمی سازه، x_i و a_i به ترتیب سطح و ضخامت المان i ام، V حجم کلیه مصالح مصرفی، x_i^{\min} و x_i^{\max} حدود پایین و بالای ضخامت هر المان و n تعداد المانها هستند.

یعنی به دنبال ضخامتهایی برای المانهای تشکیل دهنده سازه می گردیم که با مصرف حجم محدودی از مصالح بتوانیم سخت ترین سازه را ایجاد نمائیم در حالی که ضخامت هر المان نمی تواند از حدود مشخص شده تجاوز نمایند.

۴. چگالی انرژی کرنشی

طبق مطالب ارائه شده در مرجع [۲] ایده آل ترین حالت برای این نوع فرمول بندی زمانی اتفاق خواهد افتاد که در جواب بهینه، قید آخر $(0 < x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max})$ غیرفعال باشد. به عبارت دیگر x_i^{\min} برابر صفر باشد و x_i^{\max} آنقدر بزرگ باشد که در جواب بهینه هر x_i کمتر از x_i^{\max} شود. این امر باعث می شود مصالح در محدوده طراحی به نحوی توزیع شود که چگالی انرژی کرنشی (e) با فرمول بندی زیر در همه نقاط برابر شود:

$$e = \frac{1}{2} (\nabla u)^T D (\nabla u)$$

که در آن پارامترهای تشکیل دهنده به صورت زیر تعریف می شوند:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad u = [u_x, u_y]^T$$

به عبارت دیگر می توان این طور بیان کرد که زمانی یک طرح بهینه است که معادله زیر برقرار باشد:

$$e = \begin{cases} const & x_i > 0 \\ any\ function & x_i = 0 \end{cases}$$

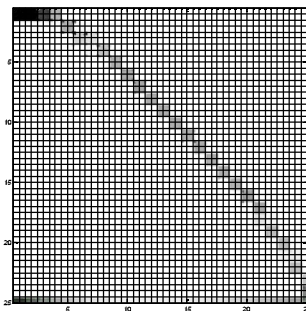
یعنی در محلهائی که مصالح وجود دارد چگالی انرژی کرنشی مساویست و در بقیه نقاط هر مقداری می تواند داشته باشد.

۵. حالت ایده آل

همان طور که ذکر شد حالت ایده آل که منجر به توزیع یکنواخت چگالی انرژی کرنشی شود زمانی است که قید آخر غیرفعال باشد یا به زبان ساده حل کننده بتواند انباشتگی مصالح را در نقاط حساس (مثل تمرکز تنش) آن قدر زیاد کند که تنش ها را در این نقاط کاهش دهد و انباشتگی مصالح بی مصرف در نقاط غیرحساس را کم کند تا نهایتاً توزیع چگالی انرژی کرنشی یکنواخت شود و در این پروسه حل بافعال شدن قید با محدودیت مواجه نشود.

مثلاً در مورد بهینه سازی مکانیزم انتقال نیرو در شکل (۱) یک حل تقریباً ایده آل منجر به سازه شکل (۲) می شود. همان طور که مشاهده می شود انباشتگی مصالح در سه نقطه حساس اتفاق افتاده است. (پایین - راست، بالا - چپ، پایین - چپ). این امر باعث شده است شکل سازه ای روشنی قابل رویت نباشد و بنابراین بررسی مسیر چگالی انرژی کرنشی با روش های پردازش تصویر^۵ بسیار مشکل است.

برای رفع این مشکل در این مقاله روند تغییرات میدان چگالی انرژی کرنشی واریسی شده است.



شکل (۲): بهینه سازی توپولوژی در یک حالت تقریباً ایده آل

۶. واریسی تغییرات میدان چگالی انرژی کرنشی

برای مشاهده روند تغییرات این میدان می توان از حالت های غیر ایده آل شروع کرد و به سمت حالت ایده آل حرکت کنیم و یکنواخت شدن میدان چگالی را در این پروسه مشاهده کنیم. بدین منظور با انتخاب مقادیر مختلف برای $\frac{x^{\max}}{V}$ می توان سازه های مختلف ایجاد کرد که در آن حجم کل مصالح مصرفی و x^{\max} حد بالای ضخامت المان ها است.

(با فرض اینکه x^{max} برای همه المان‌ها مساوی است) و x^{min} عدد بسیار نزدیک به صفر انتخاب شده است^۶ با افزایش این نسبت به حالت ایده آل نزدیک می‌شویم.

۷. مثال عددی

بهینه‌سازی توپولوژی و بررسی تغییرات چگالی انرژی کرنشی در مورد مکانیزم کنسولی شکل (۱) در فضای دو بعدی انجام شده است. در این مسئله از مشخصات مصالح فولاد استفاده شده است:

$$E=2.1e6 \text{ Kg/cm}^2, \nu = .3$$

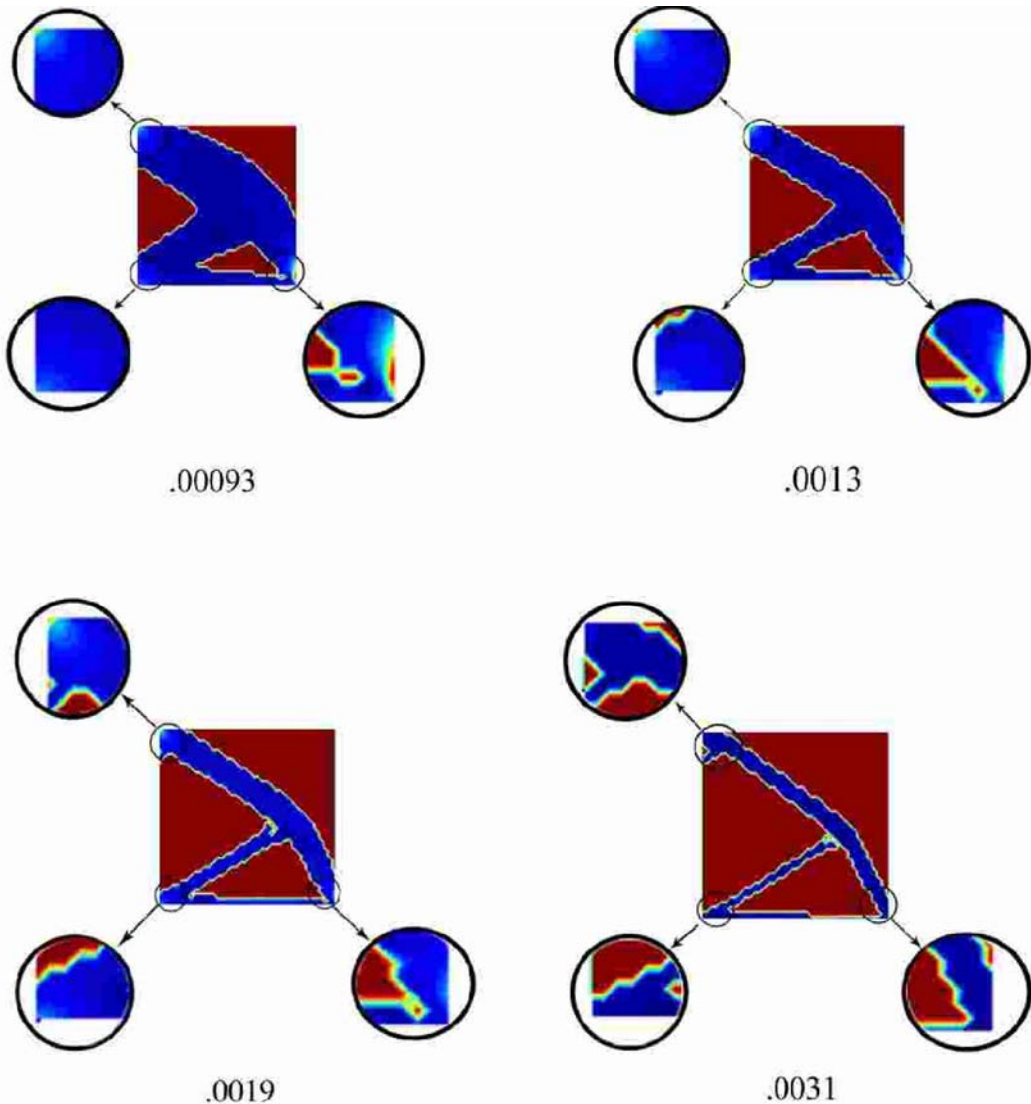
در این مثال محدوده نشان داده شده در شکل (۱) به عنوان محدوده مجاز چیدمان مصالح جهت انتقال بار متمرکز 10 ton اعمال شده در گوشه پایین - راست به تکیه گاه گیردار سمت چپ انتخاب شده است. ابعاد محدوده 50 cm*50 cm است و از المانهای 2cm*2cm از نوع Q4 استفاده شده است. x^{min} در هر المان‌ها برابر 0.1 انتخاب شده. برای مقادیر مختلف $\frac{x^{max}}{V}$ تغییرات چگالی انرژی کرنشی در شکل ۳ نشان داده شده است.

از اشکال به دست آمده نتایج زیر قابل برداشتند:

۱. هر چه نسبت $\frac{x^{max}}{V}$ بزرگتر می‌شود انباشتگی مصالح در نقاط بحرانی (مثل نقاط با تمرکز تنش) بیشتر شده و از تراکم مصالح در بقیه نقاط کاسته می‌شود.

۲. هر چه نسبت $\frac{x^{max}}{V}$ بزرگتر می‌شود میدان چگالی انرژی کرنشی یکنواخت‌تری در سازه مشاهده می‌شود.

^۶ انتخاب صفر مطلق خطاهای عددی ایجاد می‌کند -



شکل (۲): تغییرات میدان چگالی انرژی کرنشی نسبت به تغییرات $\frac{x^{\max}}{V}$

۸. خلاصه و نتیجه گیری

در مورد مسائل بهینه سازی توپولوژی سازه ها بسته به نظر طراح، پارامترهای مختلفی را می توان به عنوان تابع هدف بهبود داد. یکی از این پارامترها سختی سازه است. بسیاری از طراحان ترجیح می دهند به نحوی مصالح را در فضای در اختیارشان توزیع کنند که سخت ترین سازه ایجاد شود. انتخاب این کمیت به عنوان تابع هدف محاسن زیادی دارد که توزیع یکنواخت چگالی انرژی کرنشی یکی از آنهاست. هرچند نمی توان توزیع کاملاً یکنواختی ایجاد کرد اما می توان با تغییر پارامترهای مختلف (مثلاً $\frac{x^{\max}}{V}$ در این مقاله) تغییرات کمیت چگالی انرژی کرنشی را واریسی کرد. در روند این واریسی،

با افزایش $\frac{x^{\max}}{V}$ ، یکنواخت شدن میدان چگالی انرژی کرنشی، دلالت بر عملکرد مناسب الگوریتم بهینه‌سازی به کار رفته دارد. در واقع از روش ارائه شده در این مقاله می‌توان به عنوان معیاری جهت تأیید صحت و یا عدم صحت روش بهینه‌سازی استفاده شده، بهره گرفت.

۹. مراجع

- [1] Bendsøe M.P, Sigmund O. *Topology Optimization: theory, Methods and Applications*, Springer, 2nd edition, Berlin, 2002.
- [2] Christensen P.W, Klabring A. *An Introduction to Structural Optimization*, Springer, 2009.
- [3] برکتین، علیرضا. بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پوسته صفحه‌ای با رفتار غیر خطی هندسی تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی. رساله دکتری، بخش مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، ۱۳۸۸.
- [4] Gordon J.G. *Structures or Why Things Don't Fall Down*, Penguin, Baltimore, 1978.
- [5] Hasani B, Hinton E. *Homogenization and Structural Topology Optimization*, Springer, Berlin, 1999.
- [6] Bremicher M, Chiredast M, Kikuchi N, Papalambros P.Y. Integrated Topology and Shape Optimization, *Mech.Struct.Mech.*, 19(4), 551-34, 1991.
- [7] Jang H.H, Lee H.A, Park G.J. Dynamic Response Topology Optimization Using Equivalent Static loads, 8th *World Structural and Multidisciplinary Optimization*, Lisbon, Portugal, 2009.
- [8] Bendsøe M.P, Kikuchi N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2), 197-224, 1988.
- [9] Bendsøe M.P. Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, 1, 193-202, 1989.
- [10] Park G.J. *Analytic Methods For Design Practice*, Springer, Berlin, 2007.

- [11] *GENESIS User's Manual*, Vanderplaats Research and Development, Inc., 2005.